Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas I (MA1111)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Abr – Jul 2016

Turno 7-8
Duración: 1 hora 50 minutos

RESPUESTAS

Pregunta 1. (5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x-2+\pi}-\sqrt{\pi}}{x-1}$

Solución:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x-2+\pi}-\sqrt{\pi}}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{2x-2+\pi}-\sqrt{\pi}\right)\left(\sqrt{2x-2+\pi}+\sqrt{\pi}\right)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-2+\pi}+\sqrt{\pi}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{2x-2+\pi}+\sqrt{\pi}\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{\sqrt{2x-2+\pi}+\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

Pregunta 2. (5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{1-2\cos(x)}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

Solución:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1-2\cos(x)}{\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)} \underset{x=\frac{\pi}{3}+u}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{u\to 0} \frac{1-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+u\right)}{\operatorname{sen}(u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-2\left(\cos(u)\overbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}^{=\frac{1}{2}}-\operatorname{sen}(u)\overbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)}^{=\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)}{\operatorname{sen}(u)}$$

$$= \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)+\sqrt{3}\operatorname{sen}(u)}{\operatorname{sen}(u)} = \lim_{u\to 0} \left(\frac{\left(1-\cos(u)\right)\left(1+\cos(u)\right)}{\left(\operatorname{sen}(u)\right)\left(1+\cos(u)\right)}+\sqrt{3}\right)$$

$$= \lim_{u\to 0} \left(\frac{1-\cos^2(u)}{\left(\operatorname{sen}(u)\right)\left(1+\cos(u)\right)}+\sqrt{3}\right) = \lim_{u\to 0} \left(\frac{\operatorname{sen}(u)}{1+\cos(u)}+\sqrt{3}\right) = \sqrt{3}$$

Pregunta 3. (5 ptos.) Calcule $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-x}}{x}$

Solución:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2-x}}{-|x|}}{\frac{x}{x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-x}}{-\sqrt{x^2}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{\frac{x^2-x}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-\frac{1}{x}} = -1$$

Pregunta 4. (3 ptos.) Calcule $\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{|x|}{x}\right)$

Solución:

$$\lim_{x\to 0^-}\left(1-\frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(1-\frac{(-x)}{x}\right) = 2$$
$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{|x|}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(1-\frac{x}{x}\right) = 0$$

Como los límites laterales no coinciden, el límite no existe.

Pregunta 5. (5 ptos.) Calcule $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{sen}(2x)}$

Solución:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{sen}(2x)} \underset{x=\frac{\pi}{2}+t}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}+t}{\operatorname{sen}(\pi+\pi t)}$$
$$= \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}+t}{\underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0}\cos(\pi t)+\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\operatorname{sen}(\pi t)} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{\pi}{2}+t}{-\operatorname{sen}(\pi t)}$$

El límite no exite ya que lo límites laterales no coinciden:

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\frac{\pi}{2}+t}{-\operatorname{sen}(\pi t)} = \frac{\frac{\pi}{2}}{0^+} = \infty \neq -\infty = \frac{\frac{\pi}{2}}{0^-} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{\pi}{2}+t}{-\operatorname{sen}(\pi t)}$$

Pregunta 6. (6 ptos.) Demuestre, haciendo uso de la definición de límite, que $\lim_{x\to 1} \frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x^2-1} = 7$

Solución: Como $-1 \notin \operatorname{Dom}\left(\frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x^2-1}\right)$ entonces $\delta_{\text{máx}} \in (0,2)$. Dado $\epsilon > 0$ queremos hallar $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$|x-1| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left|\frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x^2-1} - 7\right| < \epsilon.$$

$$\begin{aligned}\left|\frac{2x^3+5x^2-2x-5}{x^2-1} - 7\right| &= \left|\frac{(2x+5)(x^2-1)}{x^2-1} - 7\right| = |2x+5-7| \\ &= |2x-2| = 2\,|x-2| < 2\,\delta\end{aligned}$$

$$2\,\delta \leq \epsilon \Rightarrow \delta \leq \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow \delta = \text{mín}\left(\delta_{\text{máx}}, \frac{\epsilon}{2}\right)$$

para cualquier valor de $\delta_{\text{máx}} \in (0,2)$.

Pregunta 7. (6 ptos.) Determine los valores de a y b para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{x+1} & , \text{si } x < -1 \\ ax+b & , \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1-\cos^2(x) - x^2 & , \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

es continua en $\mathbb{R}$.

Solución: La función f es continua tanto en $(-\infty,-1)$ como en $(-1,0)$ ya que sobre cada uno de esos intervalos viene dada por una expresión algebraica explícita y no hay saltos en el dominio. En continua en $(0,\infty)$ por ser suma de productos de funciones continuas.

Para que sea continua en $x=-1$ es necesario que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = -a+b$$

de donde

$$\begin{aligned} 2 = \lim_{x\to -1^-} (1-x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{(1-x)(1+x)}{x+1} &= \lim_{x\to -1^-} \frac{1-x^2}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1^+} (ax+b) = -a+b. \end{aligned}$$

Para que sea continua en $x=0$ es necesario que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$$

de donde

$$b = \lim_{x\to 0^-} (a\,x+b) = \lim_{x\to 0^+} \left(1-\cos^2(x)-x^2\right) = 0.$$

Obtenemos entonces que los valores $a=-2$ y $b=0$ hacen que la función f sea continua en todas partes.